

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $\text{rang}(A + I_2) = 2$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Presupunem că ecuația are soluția $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci, $A \cdot Y = Y \cdot A$ și din **b)** deducem că există

$x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. Cum $\det(Y) = 0$, obținem $x = 0$ și apoi $Y^2 = 0_2$, fals.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Se verifică prin calcul.

c) Se arată prin inducție că $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, x_1 * x_2 * \dots * x_n = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdot \dots \cdot (x_n + 1) - 1$.

Obținem $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008} * \frac{1}{2009} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2008} \cdot \frac{2010}{2009} - 1 = 2009$.